بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه دهم – فصل سوم

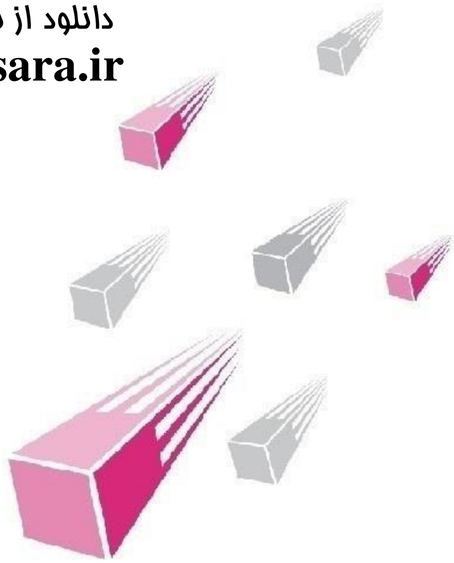
توان های گویا و عبارت های جبری

ویژه رشته های ریاضی–فیزیک و علوم تجربی

مقطع دوم متوسطه

مدرس : مهندس گنجی مقدم
۰۹۳۶۹۵۷۴۳۶۵

@Easymath_20



فصل سوم ؛ توان های گویا و عبارت های جبری :

درس اول ، ریشه و توان

در سال های گذشته با مفهوم ریشه و توان آشنا شدیم و می دانیم ریشه و توان رابطه ای دو طرف دارند ، یعنی : $۲^{۳}=۸ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{۸}=۲$

مربع یا توان دوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، a^2 را توان دوم یا مربع a می گوییم . به عنوان مثال ....

ریشه دوم : اگر a یک عدد حقیقی <u>**مثبت**</u> باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه های دوم a می نامیم . به عنوان مثال ....

نکته : عدد های منفی ریشه دوم ندارند، ریشه دوم عدد صفر خود صفر است و هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دوم قرینه هم دارد.

مکعب یا توان سوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، a^3 را توان سوم یا مکعب a می گوییم . به عنوان مثال ....

ریشه دوم : اگر a یک عدد حقیقی باشد، $\sqrt[3]{a}$ را ریشه سوم a می نامیم . به عنوان مثال ....

نکته : همه ی اعداد حقیقی، دقیقا <u>یک</u> ریشه سوم <u>هم علامت</u> با خود دارند.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد : $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$

مثال ۱ : مانند نمونه تساوی های زیر را تکمیل کنید .

$\sqrt{۸۱}=۹ \Leftrightarrow ۹^{۲}=۸۱$ $\qquad (-۳)^{۳}=-۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

$\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow$ $\qquad ۲^{۴}=۱۶ \Leftrightarrow$

$\sqrt[۳]{-۸}=-۲ \Leftrightarrow$ $\qquad (۰/۲۵)^{۲}=۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow$

گاهی اوقات با اعدادی برخورد می کنیم که مجذور و یا مکعب کامل نیستند و برای محاسبه ریشه آن ها باید به روش تقریبی عمل کنیم . به مثال زیر توجه کنید .

به عنوان مثال $\sqrt[3]{20}$ یک عدد صحیح نمی باشد ولی می دانیم $3^3=27$ و $2^3=8$ و $8<20<27$ پس :

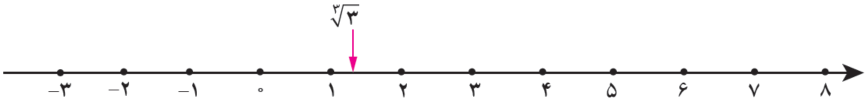
$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \longrightarrow 2<\sqrt[3]{20}<3$$

با توجه به اینکه باید عددی بین 2 و 3 را انتخاب کنیم ، یک عدد دلخواه مانند 2.5 را انتخاب می کنیم و توان سوم آن را حساب میکنیم ؛ $(2.5)^3=15.625$
مشاهده می شود از مقدار مد نظر ما یعنی 20 کمتر شد ، پس عدد بزرگتری مانند 2.7 را انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم $(2.7)^3=19.7$ که عدد قابل قبولی است .

بنابراین : $\sqrt[3]{20} \approx 2.7$

مثال ۲ : مقدار تقریبی یا دقیق ریشه هارا حساب کنید و مانند نمونه روی محور نمایش دهید .

$\sqrt[۳]{۱}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۳} \simeq ۱/۴$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۴} \simeq$ $\qquad$ $\sqrt[۲]{۲۵} =$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{-۸} =$



مثال ۳ : در جای خالی عدد صحیح مناسب قرار دهید .

ب) $\square < \sqrt{۱۷} < \square$ $\qquad$ پ) $\square < \sqrt{۳۰} < \square$

ت) $\square < \sqrt[۳]{-۷} < \square$ $\qquad$ ث) $\square < \sqrt[۳]{۷۲} < \square$

مثال ۴ : اگر $4 < \sqrt[3]{a} < 5$ باشد، به جای a چه اعداد طبیعی می توان قرار داد ؟

همانند ریشه دوم و سوم ، ریشه چهارم و پنجم نیز تعریف می شود ، به عنوان مثال :

....

....

....

نکته : هر عدد مثبت .... ریشه چهارم دارد که .... یکدیگراند . عدد های منفی ریشه چهارم ندارند .

نکته : ریشه پنجم نیز مانند ریشه سوم برای هر عدد یکتا است . اعداد منفی نیز ریشه پنجم دارند ، ریشه پنجم برای اعداد مثبت عددی مثبت و برای اعداد منفی عددی منفی است .

مثال ۵ : حاصل عبارت های زیر را حساب کنید .

$\sqrt[4]{625} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{81} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{16} =$ $\qquad$ $\sqrt[4]{1} =$

$\sqrt[5]{3125} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{243} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{32} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{1} =$

$\sqrt[5]{-3125} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-243} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-32} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-1} =$

درس دوم ؛ ریشه nام :

همانند آنچه برای ریشه های دوم،سوم ، چهارم و پنجم تعریف شد ، می توان برای ریشه های دیگر نیز به همین صورت عمل کرد .

جدول مقابل را برای عدد ۶۴ کامل کنید .

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
			$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[4]{۶۴}$ و $-\sqrt[4]{۶۴}$		$\sqrt{۶۴}=۸$ و $-\sqrt{۶۴}=-۸$

به طور کلی اعداد :
- اعداد مثبت
  - دو ریشه زوج قرینه هم دارند . مانند :
  - یک ریشه فرد دارند . مانند :
- اعداد منفی
  - ریشه زوج ندارند .
  - یک ریشه فرد دارند . مانند :

نکته : اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه nام عدد a می نامیم، هرگاه : $b^n = a$

نکته : به طور کلی اگر n زوج باشد، .... = $\sqrt[n]{a^n}$ واگر n فرد باشد ، .... = $\sqrt[n]{a^n}$.

مثال ۶ : در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

1) $\sqrt[3]{x} = -1.3$ 2) $\sqrt[7]{x} = \frac{1}{2}$ 3) $\sqrt[4]{x} = 5$

مثال ۷ : عبارت $\sqrt[4]{\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3}}$ به ازای کدام مقادیر حقیقی x تعریف شده است؟

همچنین تمامی روابطی که در پایه نهم برای ضرب و تقسیم ریشه دوم و سوم خواندیم ، برای ریشه nام نیز صدق می کنند .

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & a,b>0 \text{ و } n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & a,b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

مثال ۸ : حاصل عبارت های زیر را حساب کنید .

۱) $\sqrt[5]{1024}=$ ۲) $\sqrt[6]{64}=$

۳) $\sqrt[4]{0/0625}=$ ۴) $\sqrt{\frac{121}{100}}=$

۵) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}=$ ۶) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}=$

۷) $\sqrt{8\sqrt{4\sqrt[3]{64}}}=$ ۸) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=$

خلاصه ای از قوانین رادیکال ها :

۱) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & n \text{ فرد}\\ |a| & n \text{ زوج}\end{cases}$

۲) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ واضح است که باید b, a مثبت باشند.

۳) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۴) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \quad m,n\in\mathbb{N},\quad a\geq 0$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad m,n\in\mathbb{N},\quad a\geq 0$

۶) $a\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^n b} & n>1 \quad n \text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a^n b} & b\geq 0 \quad a\geq 0 \quad n \text{ زوج}\\ -\sqrt[n]{a^n b} & b\geq 0 \quad a\leq 0 \quad n \text{ زوج}\end{cases}$

۷) $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a} \quad a>0, \quad m,n\in\mathbb{N}$

نکته :

۱) اگر $a>1$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم: $a>1\Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a}>\cdots$

۲) اگر $0<a<1$، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم: $0<a<1\Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt[4]{a}<\cdots$

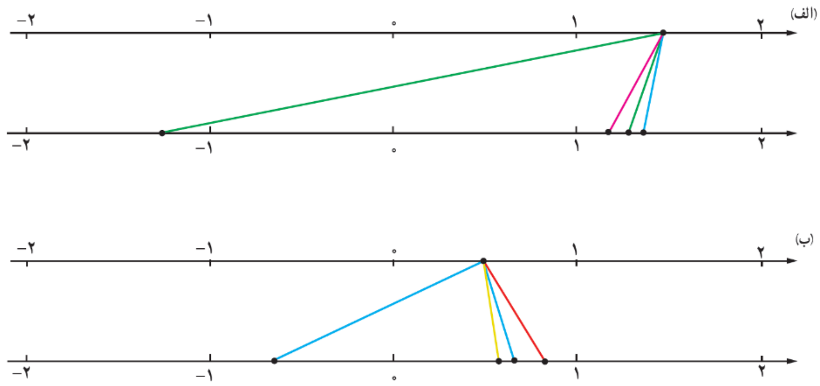
۳) اگر $-1<a<0$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر داریم: $-1<a<0\Rightarrow \sqrt[3]{a}>\sqrt[5]{a}>\sqrt[7]{a}>\cdots$

۴) اگر $a<-1$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. به‌عبارت دیگر داریم: $a<-1\Rightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\sqrt[7]{a}<\cdots$

توجه کنید که در موارد (۳) و (۴)، فرجهٔ زوج a تعریف نمی‌شود.

۵) اگر $a=0$ یا $a=1$ باشد، آن‌گاه: $\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{a}=\cdots=a$

مثال ۹ :در هریک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر خط مربوط به کدام ریشه است ؟



نکته : اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند و ریشه n ام آن ها تعریف شده باشد ، در این صورت :

$$a > b \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

ویژه دانش آموزان تلاشگر: آیا بدون استفاده از ماشین حساب امکان محاسبه رادیکال ها با دقت بالا وجود دارد ؟

بله به کمک فرمول زیر می توان با دقت نسبتا خوبی حساب کرد .

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-۱}}$$

به مثال مقابل توجه کنید :

$$\sqrt[۳]{۶۵} = \sqrt[۳]{۴^۳ + ۱} \approx ۴ + \frac{۱}{۳ \times ۴^۲} = ۴ + ۰/۰۲ = ۴/۰۲$$

$$\sqrt[۵]{۳۰} = \sqrt[۵]{۲^۵ - ۲} \approx ۲ - \frac{۲}{۵ \times ۲^۴} = ۲ - ۰/۰۲ = ۱/۹۸$$

درس سوم ؛ توان های گویا :

برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

باید به این نکته توجه کرد که اگر $a<0$ باشد ، توان $\frac{1}{n}$ آن تعریف نمی شود .به عنوان مثال عبارتی مانند $(-2)^{\frac{1}{3}}$ تعریف نمی شود.

برای اعداد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۰ : اعداد توان دار زیر را در صورت امکان به شکل رادیکالی بنویسید .

$3^{\frac{2}{7}}=$　　$(-2)^{\frac{1}{5}}=$　　$16^{\frac{1}{2}}=$　　$5^{\frac{1}{7}}=$

$81^{\frac{1}{4}}=$　　$(-2)^{\frac{3}{-2}}=$　　$3^{\frac{-2}{7}}=$　　$((-2)^2)^{\frac{1}{2}}=$

نکته : اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a>0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم :

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s=a^{rs}$

۳) $(ab)^r=a^r\times b^r$

مثال ۱۱ : تساوی های زیر را به صورت رادیکالی بنویسید .

$۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۳}{۲}}=$　　$۴^{\frac{۱}{۵}}=$

$(۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}}=$　　$۵^{\frac{۴}{۳}}=$

$(۴\times ۲)^{\frac{۱}{۳}}=$　　$۴^{\frac{۷}{۵}}=$

$۵^{\frac{۱}{۳}}\times ۵^{\frac{۲}{۳}}=$　　$۶^{\frac{۳}{۸}}=$

مثال ۱۲ : به کمک توان کسری ثابت کنید ؛ (به شرط اینکه $a > 0$ باشد)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

مثال ۱۳ : اگر $a > 0$ باشد، عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}}$ را ساده کنید.

مثال ۱۴ : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} =$

$\sqrt{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} =$

$\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} =$

مثال ۱۵ : حاصل $\sqrt[6]{(-2)^6}$ را پیدا کنید .

درس چهارم ، عبارت های جبری

اتحاد : هنگامی یک تساوی اتحاد است که :

– به ازای هر مقدار دلخواه برای متغیر های آن، عبارت مورد نظر به یک تساوی عددی تبدیل شود .

– اگر دو طرف تساوی را ساده کنیم، ضریب های جمله های متشابه در دو طرف تساوی برابر باشد.

به عنوان مثال عبارت $x(x+1)=x^2+x$ یک اتحاد است ، زیرا به ازای هر مقدار دلخواه برای x به یک تساوی عددی تبدیل می شود . مثلا اگر $x=2$ باشد ،

$2(2+1)=22+2$ ⟵ $6=6$ که یک تساوی عددی است .

مثال ۱۶ : a ، b و c را چنان به دست بیاورید که تساوی مقابل یک اتحاد باشد.

$$a(x+1)^2-b(3x-1)+c=x^2-4x+1$$

سوال : تفاوت معادله و اتحاد چیست ؟

....

....

....

در پایه نهم با تعدادی از اتحاد ها آشنا شدیم که به مرور آن ها می پردازیم ؛

۱- اتحاد مربع دو جمله ای :

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

۲- اتحاد مزدوج :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

۳- اتحاد مربع سه جمله ای :

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ca+2bc$$

٤- اتحاد جمله مشترک :

$$(a+x)(a+y)=a^2+(x+y)a+xy$$

مثال ۱۷ : اگر $x+\frac{1}{x}=2$ باشد، حاصل $21x^{10}+\frac{15}{x^{10}}$ را به دست آورید.

در این فصل نیز با تعدادی اتحاد جدید آشنا می شویم .

۵- اتحاد مکعب مجموع: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

اتحاد فوق را اثبات کنید .

....

....

....

۵-۲ – اتحاد مکعب تفاضل : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

نکته : اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحاد های گفته شده را بنویسیم و سپس آن را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت تبدیل کنیم ، هریک از عبارت های به دست آمده در حاصل ضرب را یک عامل یا شمارنده تجزیه می نامیم .

۶- اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

مثال ۱۸ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$(2z+x)^3=$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3=$

$101^3=$

$(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)=$

$(a^2-1)(a^4+a^2+1)=$

مثال ۱۹ : عبارت های زیر را تجزیه کنید .

$a^3-2ab+a^2b-2b^2=$

$x^3+27=$

$x^3-a^3=$

$x^3-125=$

$x^6-1=$

مضرب و شمارنده عبارت های جبری :

با مفهوم مضرب و شمارنده در رابطه با اعداد آشنا هستیم . به عنوان مثال ۳و۴ شمارنده ۱۲ هستند و ۱۲ نیز مضرب این دو عدد است . همچنین ۱۲ شمارنده های دیگری نیز مانند ۱۲ ، ۶ ، ۲ و ۱ دارد . ۳ و۴ نیز هرکدام مضرب های دیگری دارند مثلا مضرب های ۳ عبارتند از : ۳ ، ۶ ، ۹ ، ۱۲ و ...

مفهوم های مضرب وشمارنده در در عبارت های جبری نیز به همین شکل تعریف می شوند .عبارت $(x-1)(x+1)=x^2-1$ را درنظر بگیرید ، هر یک از عبارت های $(x-1)$ و $(x+1)$ یک شمارنده x^2-1 محسوب می شوند . همچنین x^2-1 یک مضرب این دو عبارت محسوب می شود .

مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای ، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت های جبری دیگر (ویا همزمان هردو) به دست می آیند ؛

$a+b^2$ و $2(a+b^2)$ و $(a+b^2)(a+b^2)^2$ و $-4(a+b^2)$ و $(a+b^2)(a-b)$ و.........

هریک از عبارت های فوق و عبارت های مشابه آن ها یک مضرب $(a+b^2)$ محسوب می شوند .

سوال : آیا $(a+b^2)\sqrt{7}$ نیز یک مضرب عبارت فوق محسوب می شود ؟

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج آن را صفر می کند ، تعریف نمی شود . به عنوان مثال عبارت $\frac{x^2+3x}{x-2}$ به ازای x=2 تعریف نمی شود چون مخرج آن صفر می شود .

مثال ۲۰ : عبارت گویای $\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{x^2}{x+3}-\frac{1}{x^2+1}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی شود ؟

حاصل جمع چند عبارت گویا :

- ✓ هرکدام از عبارت های گویا را ساده می کنیم.
- ✓ مخرج کسرها را تجزیه می کنیم.
- ✓ کوچک ترین مضرب مشترک بین مخرج ها را به عنوان مخرج مشترک درنظر می گیریم.
- ✓ کسرها را هم مخرج می کنیم و در نهایت باهم جمع می کنیم.

محاسبه ک.م.م چند عبارت جبری:

ابتدا عبارت ها را تجزیه می کنیم. سپس عوامل مشترک با توان بزرگتر و عوامل غیرمشترک با همان توان را انتخاب می کنیم و در هم ضرب می کنیم .

مثال ۲۱ : حاصل عبارت های گویای زیر را به دست آورید .

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-1}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$$

گویا کردن مخرج های گنگ :

برای گویا کردن مخرج های گنگ با توجه به صورت سوال ، سه حالت در نظر می گیریم :

۱) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt[n]{x^m}$ $(m<n)$ است، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می کنیم.

۲) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ است، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

۳) برای گویا کردن کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}$ است، صورت و مخرج کسر را در قسمت دوم اتحاد چاق و لاغر ضرب می کنیم.

مثال ۲۲ : مخرج عبارت های زیررا گویا کنید .

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

مثال ۲۳ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد ها حساب کنید .

1) $107^2 =$

2) $304^2=$

3) $999 \times 1001 =$

4) $499 \times 500 =$

پایان فصل سوم